Colección Ciencias de la Ingeniería

Matemáticas Básicas

Curso de nivelación

Cristina Díaz González
Jhon Fredy Rincón-Morantes
Luz Elena Valdíri Lugo
Yolanda Moreno Mendoza
Ricardo González Olaya

ESMIC
SELLO EDITORIAL

Miles Doctus

Matemáticas Básicas

Curso de nivelación

ESCUELA MILITAR DE CADETES

"General José María Córdova"

Colección Ciencias de la Ingeniería (CCI)

Esta colección agrupa las publicaciones que exploran el aporte de las Fuerzas Militares en el desarrollo tecnológico desde el área del conocimiento de la ingeniería y disciplinas afines.

Matemáticas Básicas

Curso de nivelación

Cristina Díaz González
Jhon Fredy Rincón-Morantes
Luz Elena Valdíri Lugo
Yolanda Moreno Mendoza
Ricardo González-Olaya

ESMIC
SELLO EDITORIAL

Bogotá, D. C., 2022

Catalogación en la publicación - Escuela Militar de Cadetes "General José María Córdova"

Matemáticas básicas: curso de nivelación / editores Cristina Díaz González ... [y otros 4] - Bogotá: Escuela Militar de Cadetes "General José María Córdova", 2022.

36 páginas : ilustraciones, cuadros y gráficas ; 24 cm.

ISBN 978-628-95146-1-2

E- ISBN 978-628-95146-2-9

(Colección Ciencias de la Ingeniería. Miles Doctus)

1.Matemáticas – Enseñanza 2.Trigonometría – Enseñanza programada 3.Geometría – Enseñanza Básica i.Díaz González, Cristina, (editora – autora) ii.Rincón Morantes, Jhon Fredy, Mayor (editor - autor) iii.Valdíri Lugo, Luz Helena, (editora – autora) iv.Moreno Mendoza, Yolanda, (editora – autora) v.González Olaya, Ricardo, (editor - autor) vi.Colombia. Ejército Nacional

QA39.3 M38 2022 Registro Catálogo SIBFuP 991234416007231

510.712 -- 23

Archivo descargable en formato MARC en: https://tinyurl.com/esmic991234416007231

Título: Matemáticas Básicas. Curso de nivelación

Primera edición, 2022

Cristina Díaz González
Jhon Fredy Rincón-Morantes
Luz Elena Valdíri Lugo
Yolanda Moreno Mendoza
Ricardo González-Olaya

Cubierta: Rubén Alberto Urriago Gutiérrez

2022 Escuela Militar de Cadetes "General José María Córdova"
Departamento de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación
Calle 80 N.º 38-00. Bogotá, D. C., Colombia
Teléfono: (601) 3770850 ext. 1104
Correo electrónico: selloeditorial@esmic.edu.co

Libro electrónico publicado a través de la plataforma Open Monograph Press.
Tiraje de 100 ejemplares
Impreso en Colombia - *Printed in Colombia*

ISBN impreso 978-628-95146-1-2
ISBN digital 978-628-95146-2-9

https://doi.org/10.21830/9786289514629

Contenido

Introducción

La Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova tiene como misión la formación integral de los futuros oficiales del Ejército. Para ampliar sus competencias profesionales, se le otorga al estudiante la posibilidad de estudiar una carrera complementaria al programa principal en Ciencias Militares. Uno de estos programas complementarios es de Ingeniería Civil que funciona bajo la resolución de registro calificado No. 5515 de marzo del 2017 otorgada por el Ministerio de Educación Nacional.

La Facultad de Ingeniería Civil, consciente de la heterogeneidad en el nivel académico con el que los estudiantes ingresan al programa, evidenciada en los resultados de las pruebas Saber 11, ha propuesto la realización de un curso de nivelación en matemáticas básicas que le permita a los estudiantes reforzar sus conocimientos en esta materia y así mejorar su desempeño en las asignaturas de ciencias básicas e ingnieía que cursarán más adelante.

Para el desarrollo del curso de nivelación propuesto, este libro de formación, con conceptos y ejercicios, se ha elaborado para fortalecer en el estudiante las operaciones básicas con números enteros y racionales, la potenciación, la radicación, la geometría y la trigonometría. Esto permitirá al estudiante del programa de Ingeniería Civil no solo alcanzar las competencias requeridas para aprobar sus asignaturas sino también desarrollar capacidades de abstracción espacial y representación gráfica para aplicarlas eficientemente en proyectos de ingeniería civil.

Este libro de formación es producto de un trabajo conjunto e interdisciplinar de los docentes del área de Ciencias Básicas y administrativos del programa de Ingeniería Civil;

quienes han identificado las principales debilidades de los estudiantes al ingreso del programa. El plan de trabajo para este curso de nivelación está programado para un mes, durante cuatro sábados, en sesiones de cuatro horas cada una; en las cuales se trabajará un módulo por día, estudiando el contenido teórico y realizando los ejercicios propuestos. Este curso de nivelación se implimentará de manera obligatoria en los estudiantes de primer nivel.

Objetivos

Objetivo general

Diseñar un documento para los estudiantes de primer nivel del programa de Ingeniería Civil que sirva como guía para el curso de nivelación en matemáticas básicas.

Objetivos específicos

- Nivelar a los estudiantes del programa de Ingeniería Civil de la ESMIC en operaciones básicas entre enteros y racionales.

- Aplicar las propiedades de la potenciación y radicación que le permitan al estudiante desarrollar el pensamiento matemático.

- Resolver operaciones básicas de geometría (cálculos de perímetro, área y volumen) en contextos de ingeniería.

- Fortalecer los conceptos básicos de trigonometría indispensables para la Ingeniería Civil.

Módulo 1

Operaciones básicas entre números reales

1.1. Números enteros

Es el conjunto de números reales del que hacen parte los números naturales, positivos, negativos y el cero.

1.1.1. Adición y sustracción

Para la adición y sustracción de números enteros se cumple que: (1) signos iguales se suman y se deja el mismo signo; y (2) signos diferentes se comparan sin signo, al número mayor se le resta el menor y se deja el signo del número mayor.

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $2 + 5$.

Solución:

Como los signos son iguales, el resultado de la operación es la suma de 2 y 5.

$$2 + 5 = 7$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $-4-7$.

Solución:

Como los signos son iguales, el resultado de la operación es la suma de 4 y 7 con signo negativo.

$$-4-7=-11$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $-10+2$.

Solución:

Como los signos son diferentes, el resultado de la operación es la resta de 10 y 2 con signo del número mayor, i.e., negativo.

$$-10+2=-8$$

1.1.2. Producto

Para el producto de números enteros se aplica la “Ley de signos” en la que: (1) el producto de signos iguales siempre es positivo; y (2) el producto de signos diferentes siempre es negativo.

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $(-3)\times(-8)$.

Solución:

Como los signos son iguales, el resultado de la operación es el producto entre 3 y 8 con signo postivo.

$$(-3)\times(-8)=24$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $(9) \cdot (-7)$.

Solución:

Como los signos son diferentes, el resultado de la operación es el producto entre 9 y 7 con signo negativo.

$$(9) \cdot (-7) = -63$$

1.1.3. Cociente

Para el cociente de números enteros se aplica la "Ley de signos" en la que: (1) el cociente de signos iguales siempre es positivo; y (2) el cociente de signos diferentes siempre es negativo.

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $(-45) \div (-5)$.

Solución:

Como los signos son iguales, el resultado de la operación es el cociente entre 45 y 5 con signo postivo.

$$(-45) \div (-5) = 9$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $(-30) \div 3$.

Solución:

Como los signos son diferentes, el resultado de la operación es el cociente entre 30 y 3 con signo negativo.

$$(-30) \div (3) = -10$$

Ejercicios

Realice las siguientes operaciones entre enteros aplicando apropiadamente las propiedades presentadas previamente.

1. $5+1$
2. $6-5$
3. $-6+5$
4. $-5-9$
5. $-(5+2)-(2-9)$
6. $-5+2-(2-9)$
7. $-[-(-2-5)+(-5+7)]$
8. $-[(-3-7)+(9+1)]$
9. $(-145)\times(-27)$
10. $(-3)\times(-7)$
11. $(-87)\times(-61)$
12. $(-9360)\div(6)$
13. $(-7578)\div(-9)$
14. $(-2100)\div(-25)$
15. $-\{[(-20)\div(-5)]+[(-35)\div(7)]\}$
16. $-[(-15)\times(-5)]+\{-[(-49)\div(7)]+[(-48)\div(-48)]\}$
17. $[(-5-6)+4]\times[-(8-4)]$
18. $(-8+3)\times(5-9)$
19. $4\times3\times10$
20. $[-(9+6)]\times(2-5)$

1.2. Números racionales

Es el conjunto de números reales que tienen la forma $\dfrac{a}{b}$ con $b\neq0$. Los números a y b son denominados como numerador y denominador, respectivamente.

1.2.1. Adición y sustracción

La adición y sustracción de dos números racionales, $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$, está dada por

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

La adición y sustracción de dos números racionales con igual denominador, $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$, se reduce a través de las anteriores expresiones a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $\frac{6}{3} + \frac{8}{3}$.

Solución:

Considerando que el 3 es el denominador para ambas fracciones, el resultado es

$$\frac{6}{3} + \frac{8}{3} = \frac{6+8}{3} = \frac{14}{3}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $\frac{5}{4} - \frac{1}{2}$.

Solución:

Considerando que el denominador de las fracciones es diferente, el resultado es

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{(5)\cdot(2) - (1)\cdot(4)}{(4)\cdot(2)} = \frac{10-4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

1.2.2. Producto

El producto de dos números racionales, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, está dado por

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{6}{8}$.

Solución:

Aplicando la definición del producto de dos racionales, el resultado es

$$\frac{3}{5} \times \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 8} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

1.2.3. Cociente

El cociente de dos números racionales, $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$, está dado por la siguiente expresión que es tambien conocida como "producto de medios y extremos":

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la operación $\dfrac{2}{5} \div \dfrac{7}{3}$.

Solución:

Aplicando la definición del cociente de dos racionales, el resultado es

$$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$

Ejercicios

Realice las siguientes operaciones entre enteros aplicando apropiadamente las propiedades presentadas previamente.

1. $\dfrac{26}{2}+\dfrac{5}{2}$
2. $\dfrac{3}{12}+\dfrac{(-1)}{6}$
3. $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{(-1)}{4}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{2}{3}$
4. $\dfrac{8}{5}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{7}{4}+\dfrac{5}{4}$
5. $\dfrac{(-3)}{5}+\dfrac{1}{4}$
6. $\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{4}$
7. $\dfrac{7}{8}-\dfrac{(-1)}{2}$
8. $\dfrac{8}{5}\div\dfrac{(-5)}{6}$
9. $\dfrac{(-9)}{10}\times\dfrac{(-1)}{2}$
10. $\dfrac{(-5)}{6}\times\dfrac{1}{3}$
11. $\dfrac{(-4)}{7}\times\dfrac{1}{6}$
12. $\dfrac{3}{4}\div\dfrac{2}{7}$
13. $\dfrac{(-1)}{2}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{6}$
14. $\dfrac{(-1)}{3}\times\dfrac{(-1)}{4}\times\dfrac{(-1)}{5}$
15. $\dfrac{7}{9}\div\dfrac{(-1)}{2}$

Módulo 2

Potenciación y radicación

2.1. Potenciación

2.1.1. Definición

Operación que consiste en multiplicar un número, llamado base, por si mismo las veces que indique un número denominado exponente. Lo anterior definición utiliza la siguiente notación

$$a^n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = b$$

Donde a es la base, n el exponente que pértenece a los números reales, y b la potencia o resultado de la potenciación.

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia 3^2.

Solución:

La base es 3 y el exponente es 2, por tanto se debe multiplicar 2 veces el número 3 por si mismo.

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia $(-4)^5$.

Solución:

La base es -4 y el exponente es 5, por tanto se debe multiplicar 5 veces el número -4 por si mismo.

$$(-4)^5 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -1024$$

2.1.2. Propiedades

2.1.2.1. Producto

Caso 1: Para bases iguales con exponentes diferentes se cumple que

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

Ejemplo

Determine el resultado del producto de potencias $5^3 5^2 5$.

Solución:

Se tiene la base 5, con los exponentes 1, 2 y 3, por tanto se aplica la suma de exponentes.

$$5^3 \cdot 5^2 \cdot 5 = 5^{3+2+1} = 5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15625$$

Ejemplo

Determine el resultado del producto de potencias $4^2 \cdot 4^3 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 3^3$.

Solución:

Se tienen dos bases diferentes, 3 y 4, por tanto para cada base se aplica la suma de exponentes y el resultado del producto de potencias corresponde a la multiplicación de los resultados de las potencias de cada base.

$$4^2 \cdot 4^3 \cdot 4 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} \cdot 4^{1+2+3} = 3^5 \cdot 4^6 = 243 \cdot 4096 = 995328$$

Caso 2: Para bases diferentes con exponentes iguales se cumple que

$$a^n b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo

Determine el resultado del producto de potencias $3^2 4^2 5^2$.

Solución:

Se tienen tres bases diferentes, 3, 4 y 5, con el exponente común 2, por tanto se multiplican las bases y posteriormente se realiza la potencia para obtener el resultado del producto de potencias.

$$3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2 = 3600$$

Ejemplo

Determine el resultado del producto de potencias $4^3 5^3 2^2 7^2$.

Solución:

Se tienen cuatro bases diferentes, 2, 4, 5 y 7, con los exponentes comunes 2 y 3, por tanto se multiplican las bases con exponentes comunes, se realiza la potencia con cada exponente y para obtener el resultado del producto de potencias se realiza la multiplicación de los resultados anteriores.

$$4^3 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 7^2 = (4 \cdot 5)^3 \cdot (2 \cdot 7)^2 = 20^3 \cdot 14^2 = 8000 \cdot 196 = 1568000$$

2.1.2.2. Cociente

Caso 1: Para bases iguales con exponentes diferentes se cumple que

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \textbf{con} \quad a \neq 0$$

Ejemplo

Determine el resultado del cociente de potencias $\dfrac{4^3}{4^2}$.

Solución:

Se tiene la base 4, con los exponentes 2 y 3, por tanto se aplica la resta de exponentes.

$$\frac{4^3}{4^2} = 4^{3-2} = 4^1 = 4$$

Ejemplo

Determine el resultado del cociente de potencias $\dfrac{4^7}{4^2 4^3}$.

Solución:

Se tiene la base 4, con los exponentes 2, 3 y 7, por tanto se aplica la resta de exponentes.

$$\frac{4^7}{4^2 4^3} = 4^{7-2-3} = 4^2 = 16$$

Caso 2: Para bases diferentes con exponentes iguales se cumple que

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

Ejemplo

Determine el resultado del cociente de potencias $\dfrac{6^2}{3^2}$.

Solución:

Se tienen dos bases diferentes, 3 y 6, con el exponente común 2, por tanto se dividen las bases y posteriormente se realiza la potencia para obtener el resultado del cociente de potencias.

$$\frac{6^2}{3^2} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Ejemplo

Determine el resultado del cociente de potencias $\frac{8^2 6^3}{4^2 2^3}$.

Solución:

Se tienen cuatro bases diferentes, 2, 3, 5 y 6, con los exponentes comunes 2 y 3, por tanto se dividen las bases de exponentes iguales, se realiza la potencia para obtener el resultado del cociente de potencias, y el resultado final corresponde a la multiplicación de las operaciones previas.

$$\frac{8^2 6^3}{4^2 2^3} = \left(\frac{8}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

2.1.2.3. Potencia de potencia

Para la potencia de una potencia se cumple que

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia $(4^3)^2$.

Solución:

Se tiene la base 4, con los exponentes 2 y 3, por tanto se aplica la multiplicación de exponentes.

$$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4096$$

2.1.2.4. Exponente 1

Toda base con exponente 1 da como resultado la base, es decir

$$a^1 = a$$

2.1.2.5. Exponente 0

Toda base con exponente 0 da como resultado 1, es decir

$$a^0 = 1$$

2.1.2.6. Distributividad del producto

Para el producto de bases diferentes, con exponentes diferentes, elevados a una misma potencia se cumple que

$$(a^n b^m)^k = a^{nk} b^{mk}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia $(2^3 5^2 7^4)^2$.

Solución:

Se tiene el producto de tres bases difrentes, 2, 5 y 7, con los exponentes 2, 3 y 4, y todo elevado a una potencia de 2, por tanto se aplica la multiplicación de exponentes para cada potencia.

$$(2^3 5^2 7^4)^2 = 2^{3\cdot 2} \cdot 5^{2\cdot 2} \cdot 7^{4\cdot 2} = 2^6 \cdot 5^4 \cdot 7^8 = 64 \cdot 625 \cdot 5764801$$

2.1.2.7. Distributividad del cociente

Para el cociente de bases diferentes, con exponentes diferentes, elevados a una misma potencia se cumple que

$$\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^k = \frac{a^{nk}}{b^{mk}} = a^{nk} b^{-mk} \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia $\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^2$.

Solución:

Se tiene e cociente de dos bases difrentes, 2 y 5, con los exponentes 2 y 3, y todo elevado a una potencia de 2, por tanto se aplica la multiplicación de exponentes para cada potencia.

$$\left(\frac{2^3}{5^2}\right)^2 = \frac{2^{3\cdot 2}}{5^{2\cdot 2}} = \frac{2^6}{5^4} = \frac{64}{625}$$

2.1.2.8. Potencia negativa como fraccionario

Una potencia negativa es equivalente a

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia 8^{-5}.

Solución:

Se tiene la base 8 y el exponente -5, por tanto se expresa la potencia como fracción.

$$8^{-5} = \frac{1}{8^5} = \frac{1}{32768}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la potencia $2^{-3}3^9$.

Solución:

Se tiene las bases 2 y 3, y los exponentes -3 y 9, por tanto se expresa la potencia como fracción.

$$2^{-3}3^9 = \frac{3^9}{2^3} = \frac{19683}{8}$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones aplicando apropiadamente las propiedades presentadas previamente.

1. $a^2b^3c^4a^2b^2$
2. $\left(\dfrac{a^2b^3a^2b^3}{a^4b^3a^2b}\right)^3$
3. $\left(\dfrac{a^5b^2c^3d^4a^2b^3c^3}{a^2b^3c^2a^4b^3c^2d^4}\right)^{-3}$
4. $\left(\dfrac{a^2b^3c^2}{a^2b^8a^2b^3a^2b^3}\right)^7$
5. $\left(\dfrac{a^3b^2c^2a^2b^3c}{a^2b^3a^2b^4a^3c^4}\right)^{-5}$
6. $\left(\dfrac{a^2b^3a^4b^2a^3b^5}{a^2b^2a^3b^4a^3c^7}\right)^{-8}$
7. $\left(\dfrac{m^2m^3p^2}{m^{-5}n^{-3}}\right)^3$
8. $\left(\dfrac{m^{-3}n^5}{n^{-6}m^2}\right)^4$
9. $\left(\dfrac{p^{-2}p^0}{q^{-5}q^2p^3}\right)^{-2}$
10. $\left(\dfrac{m^{-2}n^3p^{-8}}{mn^{-1}p^{10}}\right)$
11. $\left(\dfrac{x^{-1}y^3z^5}{x^{-2}}\right)^{-1}\left(\dfrac{w^2}{xy}\right)^5$
12. $\left[xy^3\left(\dfrac{x^{-3}x^2y}{z}\right)^3\right]^2$

2.2. Radicación

2.2.1. Definición

Operación inversa a la potenciación en la que si se tienen dos números, índice y radicando, se busca encontar un número llamado raiz. La raiz cumple que si se eleva (potencia) al índice se obtiene el radicando. La anterior definición utiliza la siguiente notación:

$$\sqrt[n]{a^m} = b$$

Donde a es el radicando, n el índice que pértenece a los números reales, y b la raiz o resultado de la radicación.

Ejemplo

Determine el resultado de la raiz $\sqrt[2]{25}$.

Solución:

El radicando es 25 y el índice es 2, por tanto el número 5 satisface que $5^2 = 25$.

$$\text{Como } 5^2 = 25, \text{ entonces } \sqrt[2]{25} = 5$$

2.2.2. Propiedades

2.2.2.1. Distributividad del producto

La raiz de un producto cumple que

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la raiz $\sqrt[2]{25 \cdot 4}$.

Solución:

El radicando es el producto de 4 y 25, y el índice es 2, por tanto la raiz de toda la operación corresponde a la multiplicación de las raices de 4 y 25.

$$\sqrt[2]{25 \cdot 4} = \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{4} = 5 \cdot 2 = 10$$

2.2.2.2. Distributividad del cociente

La raiz de un producto cumple que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la raiz $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$.

Solución:

El radicando es el cociente de 27 y 8, y el índice es 3, por tanto la raiz de toda la operación corresponde a la división de las raices de 27 y 8.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

2.2.2.3. Radicación como potencia fraccionaria

La operación de radicación se puede escribir como una potencia cumpliéndose que

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\left(\frac{m}{n}\right)}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la raiz $\sqrt[2]{5^4}$.

Solución:

El radicando es 5, el exponente del radicando es 2, el índice es 4, por tanto la operación puede desarrollarse como

$$\sqrt[2]{5^4} = 5^{\left(\frac{4}{2}\right)} = 5^2 = 25$$

2.2.2.4. Raiz de una raiz

Para la raiz de una raiz se cumple que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo

Determine el resultado de la raiz $\sqrt[2]{\sqrt[3]{4096}}$.

Solución:

El radicando es 4096, los índices son 2 y 3, por tanto la operación puede desarrollarse como

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[2\cdot 3]{4096} = \sqrt[6]{4096} = 4$$

Ejercicios

Simplifique las siguientes expresiones aplicando apropiadamente las propiedades presentadas previamente.

1. $\sqrt[5]{a^3b^2}$
2. $\sqrt[4]{a^3b^2a^2}$
3. $\sqrt[4]{\dfrac{a^2b^3a^4b^3}{a^3b^5}}$
4. $\sqrt[7]{\dfrac{a^3b^2a^2b^3a^4}{a^2b^3a^3b^2a}}$
5. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3b^2a^4b^3}}$
6. $\sqrt[6]{\dfrac{a^4a^2b^2b^3}{a^3b^4c^3a^2}}$
7. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^6b^5b^5b^2}}$
8. $\sqrt[8]{a^8b^{16}a^5a^3b^6}$
9. $\sqrt{\dfrac{64a^6m^7a^3}{81a^5m^3m^2}}$
10. $\dfrac{\sqrt{x^2y^3z^2}}{xy^2}$
11. $\sqrt{8a^{16}\sqrt{\dfrac{a^4b^{32}aa^6a}{b^6a^3}}}$

Módulo 3

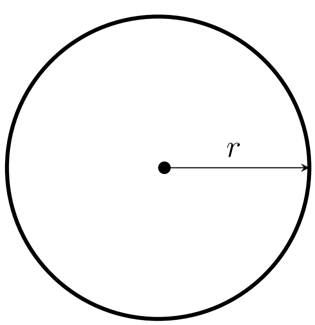
Geometría básica

3.1. Perímetro

El perímetro se define como una medida que cuantifica la longitud alrededor de una región de espacio bidimensional. El perímetro, de acuerdo con su definición, posee unidades de longitud $[L]$. A continuación, para las figuras geométricas básicas se presentan las expresiones que permiten estimar su perímetro P.

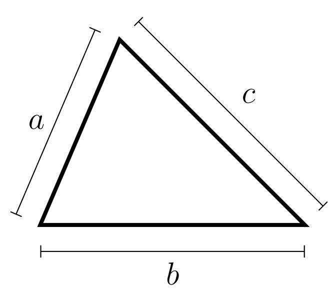
Círculo

$$P = 2\pi \cdot r$$



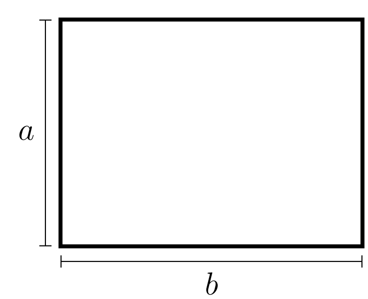
Triángulo

$$P = a + b + c$$



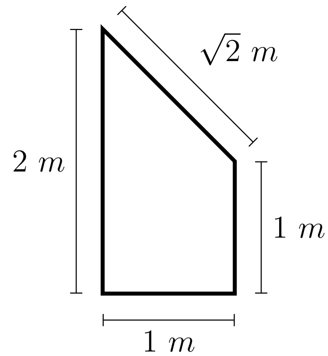
Rectángulo

$$P = 2\,(a + b)$$



Ejemplo

Determine el perímetro de la siguiente figura.



Solución:

Considerando la definición de perímetro, el perímetro de la figura es la suma de sus cuatro lados, por lo que

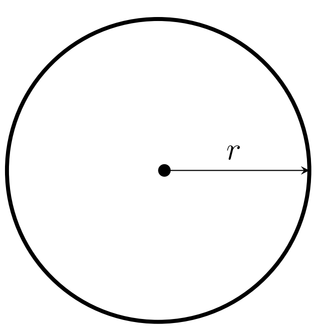
$$P = 1 + 1 + 2 + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2} = 5.41\ m$$

3.2. Área

El área se define como una medida que cuantifica la extensión bidimensional de una región de espacio. El área, de acuerdo con su definición, posee unidades de longitud al cuadrado $[L^2]$. A continuación, para las figuras geométricas básicas se presentan las expresiones que permiten estimar su área A.

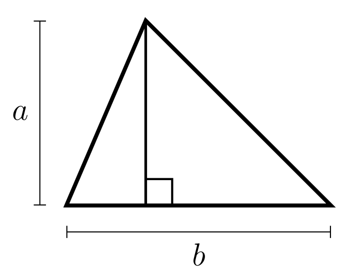
Círculo

$$A = \pi \cdot r^2$$



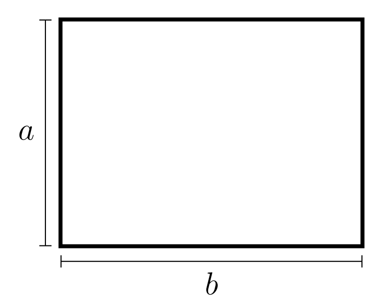
Triángulo

$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$



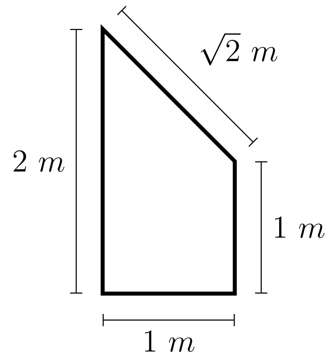
Rectángulo

$$P = a \cdot b$$



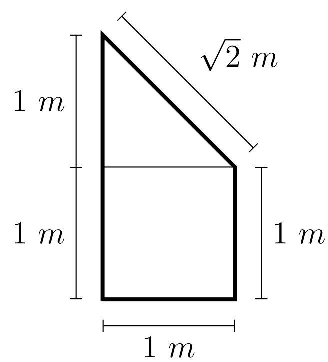
Ejemplo

Determine el área de la siguiente figura.



Solución:

Descomponiendo la figura en dos regiones, una triangular y otra cuadrada, el área de la figura puede estimarse como la suma de estas así:



Área triangular:

$$A_1 = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{(1) \cdot (1)}{2} = \frac{1}{2}\ m^2$$

Área cuadrada:

$$A_2 = a \cdot b = (1) \cdot (1) = 1\ m^2$$

Área total:

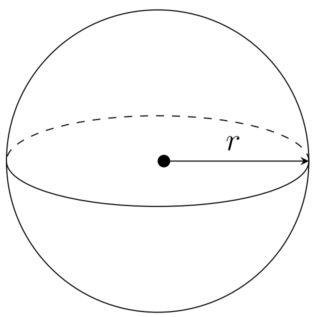
$$A = A_1 + A_2 = \left(\frac{1}{2}\right) + (1) = \frac{3}{2} = 1.5\ m^2$$

3.3. Volumen

El volumen se define como una medida que cuantifica la extensión tridimensional de una región de espacio. El volumen, de acuerdo con su definición, posee unidades de longitud al cubo $[L^3]$. A continuación, para algunos volúmnes básicos se presentan las expresiones que permiten estimar su volumen V.

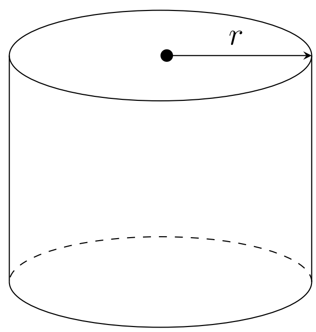
Esféra

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$$



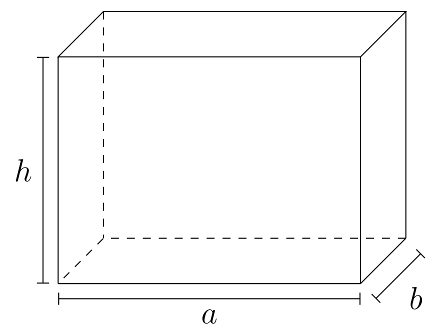
Cilíndro

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



Ortoedro

$$V = a \cdot b \cdot h$$



Para prismas rectos, el volumen es igual a el producto del área tranversal del prisma y la logitud de este. Tanto el cilindro como el ortoedro son ejemplo de lo anterior.

Ejemplo

Calcular la altura de un cilindro que tiene un radio de 2 m y un volumen de 10 m^3.

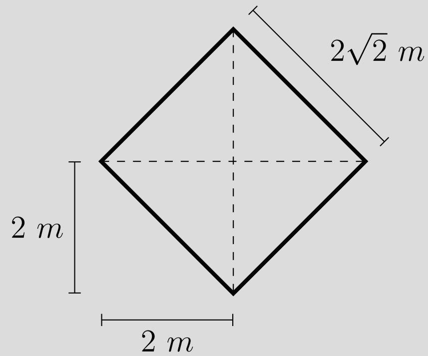
Solución:

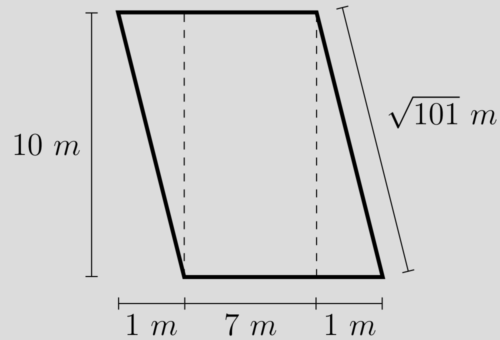
Dado que el volumen de un cilindro está dado por la expresión $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, y que el volumen V y el radio r son conocidos, la altura del cilíndro es determinada así:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \therefore \quad h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{(10)}{\pi \cdot (2)^2} = 0.8 \ m$$

Ejercicios

Calcule el área y perímetro de las siguientes figuras:

1. 

2. 

Determine:

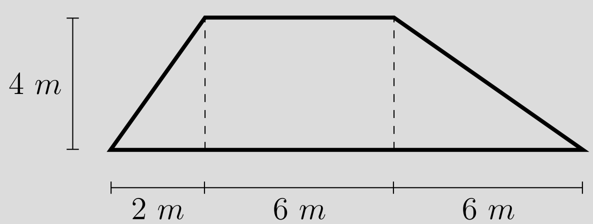
3. La longitud de los lados de un rectángulo cuya área es de 25 m^2 y cuyo lado más largo es 3 veces el lado más corto.

4. El perímetro de un cuadrado cuya área de de 900 m^2.

5. El área que hay entre dos circuferencias con radios de 5 m y 2 m, respectivamente.

6. El área transversal de un cilindro cuyo volumen es de 100 m^3 y cuya longitud es de 75 m.

7. El volumen de un prisma cuya longitud es de 100 m y tiene la siguiente sección transversal:

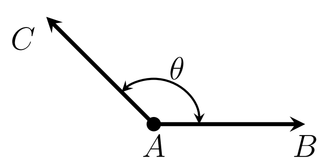


Módulo 4

Trigonometría

4.1. Ángulo

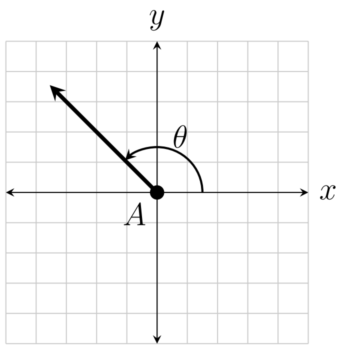
Un ángulo se define como la figura formada por dos rayos o semirrectas con un mismo punto de origen. El punto común de origen es llamado "vértice" mientras que los rayos son llamados "lados" del ángulo. En la siguiente figura se presenta un esquema en donde los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman el ángulo θ, o también $\angle BAC$ o $\angle CAB$, con vértice en el punto A.



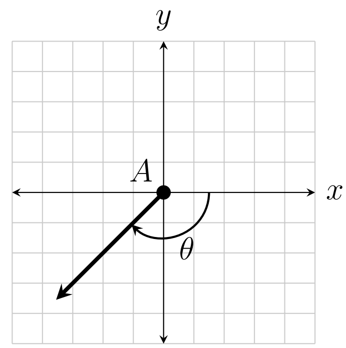
4.2. Unidades angulares

Para cuantificar la magnitud de un ángulo, diferentes medidas o unidades angulares se han propuesto. Las dos unidades angulares comunmente utilizadas para medir ángulos son los grados (°) y los radianes (rad). En el sistema de grados se considera que un ángulo completo, ángulo que se genera cuando se da un giro completo, está dividido en 360 partes iguales llamadas grados. En el sistema de radianes se considera que un ángulo completo hay 2π unidades llamadas radianes. Dado lo anterior, existe una equivalencia entre grados y radianes en la que 360° corresponden a 2π rad o también 180° corresponden a π rad.

Los ángulos puden ser positivos o negativos. Por convención, un ángulo es positivo cuando se forma en el sentido contrario a las agujas del reloj. Si un ángulo se forma en el sentido de las agujas del reloj es negativo. En las siguientes figuras se ilustra la anterior convención en un plano x–y.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

Ejemplo

Convertir 150° a radianes.

Solución:

Dada la equivalencia entre grados y radianes, 150° son convertidos a radianes así:

$$150^\circ \cdot \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ}\right) = \frac{5}{6}\pi \text{ rad} \quad \text{o} \quad 150^\circ \cdot \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\right) = \frac{5}{6}\pi \text{ rad}$$

Ejemplo

Convertir $\frac{6}{5}\pi$ rad a grados.

Solución:

Dada la equivalencia entre grados y radianes, $\frac{6}{5}\pi$ rad son convertidos a grados así:

$$\frac{6}{5}\pi \text{ rad} \cdot \left(\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}\right) = 68.75^\circ \quad \text{o} \quad \frac{6}{5}\pi \text{ rad} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = 68.75^\circ$$

Ejercicios

Convierta los siguientes ángulos de grados a radianes.

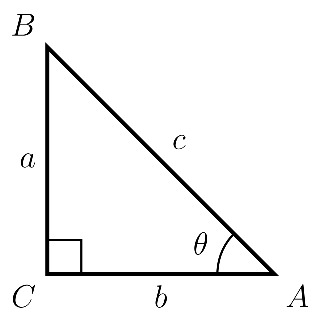
1. $370°$
2. $250°$
3. $450°$
4. $-39°$
5. $85°$
6. $-125°$

Convierta los siguientes ángulos de radianes a grados.

7. $\frac{\pi}{7}$
8. $\frac{\pi}{12}$
9. $\frac{5}{3}\pi$
10. $-\frac{5}{4}\pi$
11. $\frac{10}{3}\pi$
12. $\frac{30}{25}$

4.3. Relaciones trigonométricas

El cociente de los lados de un triángulo rectángulo, triángulo con un ángulo interno de $90°$, con respecto a cualquiera de sus ángulos se definen como relaciones o razones trigonométricas.



Considerando el anterior triángulo rectángulo, las relaciones trigonométicas seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan) son definidas para el ángulo θ ($\angle BAC$) así:

$$\sin(\theta) = \frac{a}{c}$$

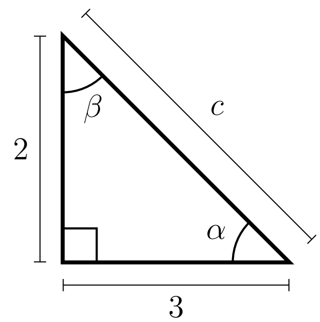
$$\cos(\theta) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\theta) = \frac{a}{b} \quad \therefore \quad \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

donde a es el lado o cateto opuesto al ángulo θ, b el lado adyacente al ángulo θ, y c el lado más grande o hipotenusa del triángulo.

Ejemplo

Determine el valor de todos los lados y ángulos del siguiente triángulo rectángulo.



Solución:

Dado que dos de los lados del triángulo rectángulo son conocidos, los ángulos α y β son calculados con la relación tangente así:

$$\tan(\alpha) = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 0.5880 \text{ rad} = 33.69^\circ$$

$$\tan(\beta) = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 0.9828 \text{ rad} = 56.31^\circ$$

Dado que todos los ángulos y que dos lados son conocidos, el valor de la hipotenusa puede ser estimado de cualquiera de las maneras que continuación se presenta:

$$\sin(\alpha) = \frac{2}{c} \quad \therefore \quad c = \frac{2}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin(0.5880 \text{ rad})} = \frac{2}{\sin(33.69^\circ)} = 3.61$$

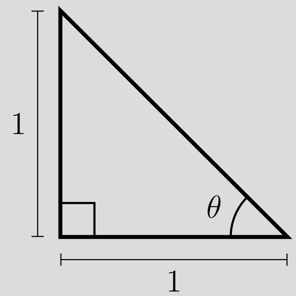
$$\cos(\alpha) = \frac{3}{c} \quad \therefore \quad c = \frac{3}{\cos(\alpha)} = \frac{3}{\cos(0.5880 \text{ rad})} = \frac{3}{\cos(33.69^\circ)} = 3.61$$

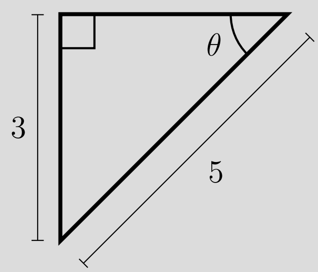
$$\sin(\beta) = \frac{3}{c} \quad \therefore \quad c = \frac{3}{\sin(\beta)} = \frac{3}{\sin(0.9828 \text{ rad})} = \frac{3}{\sin(56.31^\circ)} = 3.61$$

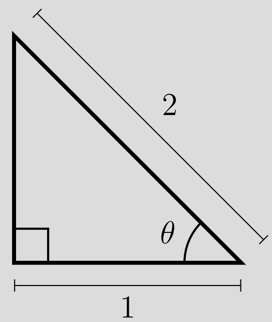
$$\cos(\beta) = \frac{2}{c} \quad \therefore \quad c = \frac{2}{\cos(\beta)} = \frac{2}{\cos(0.9828 \text{ rad})} = \frac{2}{\cos(56.31^\circ)} = 3.61$$

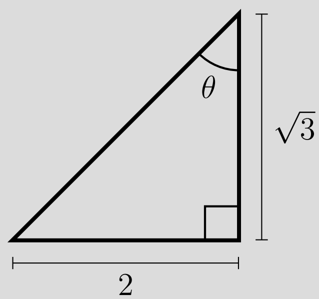
Ejercicios

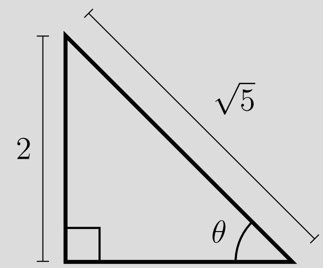
Calcule para cada uno de los triángulos el seno, coseno y tangente del ángulo θ.

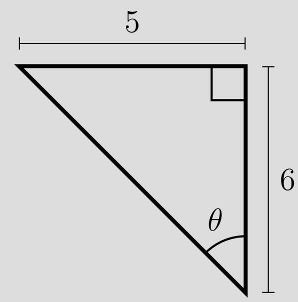
1.


2.


3.


4.


5.


6.


4.4. Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades en las que las relaciones trigonométricas están involucradas y se cumplen para cualquier valor. A continuación, son presentadas algunas de estas identidades.

Recíprocas:

- $\csc(\theta) = \dfrac{1}{\sin(\theta)}$
- $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)}$

Pitagóricas:

- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$
- $\csc^2(\theta) = 1 + \cot^2(\theta)$

Suma y diferencia de ángulos:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Ángulos dobles:

- $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
- $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$
- $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$
- $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$

Ángulos medios:

- $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\theta)}{2}}$
- $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos(\theta)}{2}}$
- $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}}$

Ejemplo

Verifique si la siguiente igualdad corresponde a una identidad trgonométrica.

$$\sin(\theta)\sec(\theta) = \tan(\theta)$$

Solución:

Dado que $\sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$, se sustituye en la expresión y se tiene que

$$\sin(\theta) \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

como $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, entonces

$$\tan(\theta) = \tan(\theta)$$

por tanto, la expresión es una identidad trigonométrica.

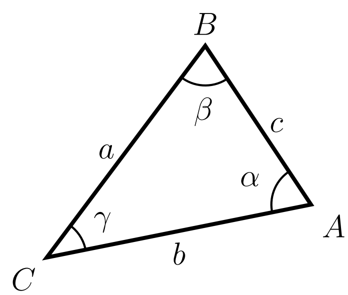
Ejercicios

Verifique si las siguientes igualdades son identidades trgonométricas.

1. $-\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) - \tan(\theta)\cot(\theta)$
2. $1 - \cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+\cot^2(\theta)} + 1$
3. $\dfrac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \cot^2(\theta)$
4. $\csc(\theta)\cos(\theta) = \cot(\theta)$

4.5. Ley del seno

La ley del seno establece que la relación entre los lados de un triángulo y los senos del ángulo opuesto son equivalentes.



Considerando el anterior triángulo, la ley del seno puede ser escrita así

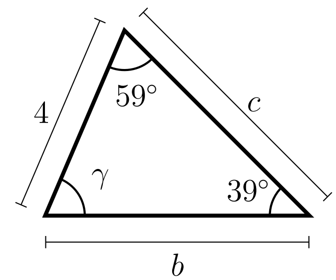
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

o también como

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Ejemplo

Determine el valor de todos los lados y ángulos del siguiente triángulo empleando la ley del seno.



Solución:

Dado que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180°, y que se dos de los tres ángulos del triángulo son conocidos, el ángulo γ es determinado así:

$$\gamma + 59^\circ + 39^\circ = 180^\circ \quad \therefore \quad \gamma = 180^\circ - 59^\circ - 39^\circ = 82^\circ$$

Dado que se conoce el valor del lado opuesto al ángulo de 39° y que no se conoce el lado opuesto al ángulo de 59°, es decir el lado b, se puede establecer la siguiente relación para determinar b así:

$$\frac{\sin(39^\circ)}{4} = \frac{\sin(59^\circ)}{b} \quad \therefore \quad b = 4 \cdot \frac{\sin(59^\circ)}{\sin(39^\circ)} = 5.45$$

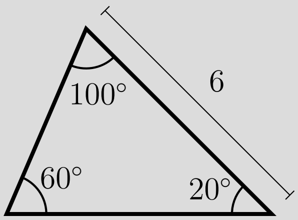
Dado que se conoce el valor de los lados opuestos a los ángulo de 39° y 59°, y que no se conoce el lado opuesto al ángulo γ, es decir el lado c, se pueden establecer la siguientes relaciones para determinar c así:

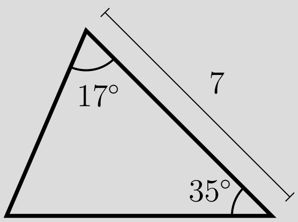
$$\frac{\sin(39^\circ)}{4} = \frac{\sin(82^\circ)}{c} \quad \therefore \quad c = 4 \cdot \frac{\sin(82^\circ)}{\sin(39^\circ)} = 6.29$$

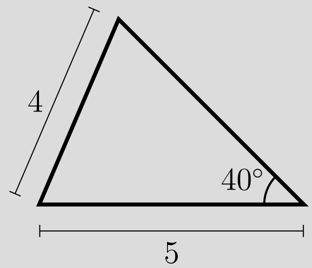
$$\frac{\sin(59^\circ)}{5.45} = \frac{\sin(82^\circ)}{c} \quad \therefore \quad c = 5.45 \cdot \frac{\sin(82^\circ)}{\sin(59^\circ)} = 6.29$$

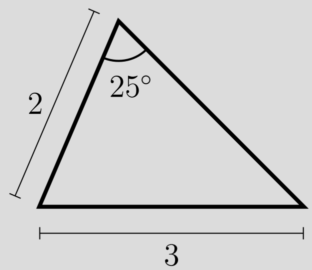
Ejercicios

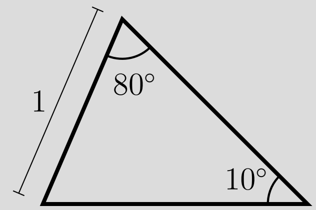
Determine el valor de todos los lados y ángulos de los siguientes triángulos empleando la ley del seno.

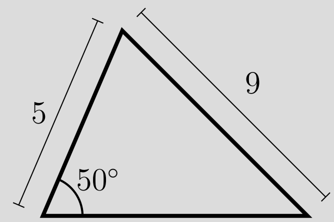
1. 

2. 

3. 

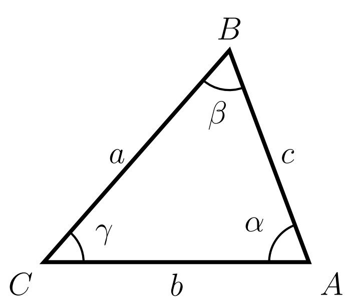
4. 

5. 

6. 

4.6. Ley del coseno

La ley del coseno establece una relación entre los lados de un triángulo y el coseno de su ángulo.



Considerando el anterior triángulo, la ley del coseno puede ser escrita para cada uno de los tres ángulos. La ley del coseno para el ángulo γ es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

para el ángulo α es

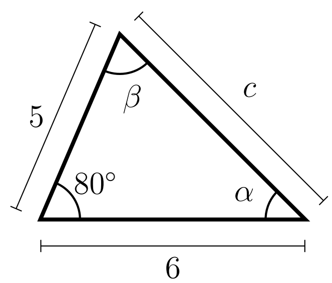
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

y para el ángulo β es

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

Ejemplo

Determine el valor de todos los lados y ángulos del siguiente triángulo empleando la ley del coseno.



Solución:

Dado que se conocen dos lados y el ángulo que forman estos dos, el lado opuesto al ángulo conocido se puede determinar como

$$c^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2(5)(6)\cos(80°) = 50.6 \quad \therefore \quad c = \sqrt{50.6} = 7.1$$

Dado que todos los lados son ahora conocidos, los ángulos α y β son determinados de la siguiente manera

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad 2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

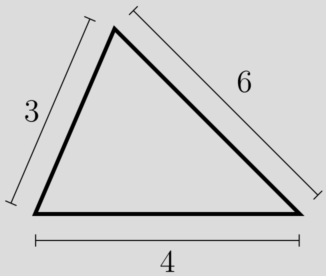
$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad \therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{(6)^2 + (7.1)^2 - (5)^2}{2(6)(7.1)}\right) = 43.9°$$

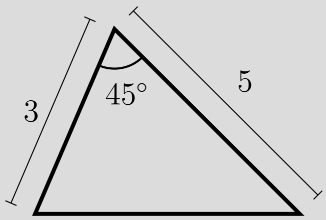
Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180° y se conocen dos de los tres ángulos del triángulo, el ángulo γ es determinado así:

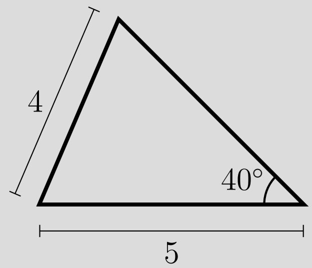
$$\gamma + 80° + 43.9° = 180° \quad \therefore \quad \gamma = 180° - 80° - 43.9° = 56.1°$$

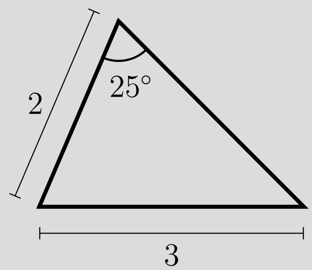
Ejercicios

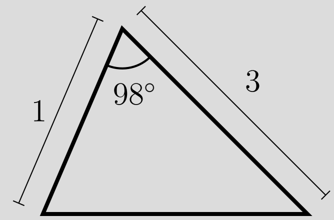
Determine el valor de todos los lados y ángulos de los siguientes triángulos empleando la ley del coseno.

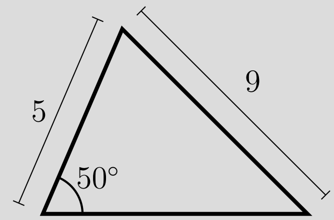
1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

Cristina Díaz González

Licenciada en Física (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), Magister en Educación (Universidad Militar Nueva Granada). Coordinadora de Laboratorios de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería Civil y Docente de la Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova.

Jhon Fredy Rincón-Morantes

Ingeniero Civil (Universidad Militar Nueva Granada), Especialista en Diseño y Construcción de Vías y Aeropistas (Escuela de Ingenieros Militares), Magister en Infraestructura Vial (Universidad Santo Tomás), Candidato a Doctor en Ciencias Aplicadas (Universidad Militar Nueva Granada). Decano de la Facultad de Ingeniería Civil de la Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova.

Luz Elena Valdíri Lugo

Ingeniera Química (Fundación Universidad de América), Especialista en Pedagogía y Docencia Universitaria (Universidad La Gran Colombia), Especialista en Estadística Aplicada (Fundación Universitaria Los Libertadores), Magister en Educación (Universidad Militar Nueva Granada). Docente de la Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova.

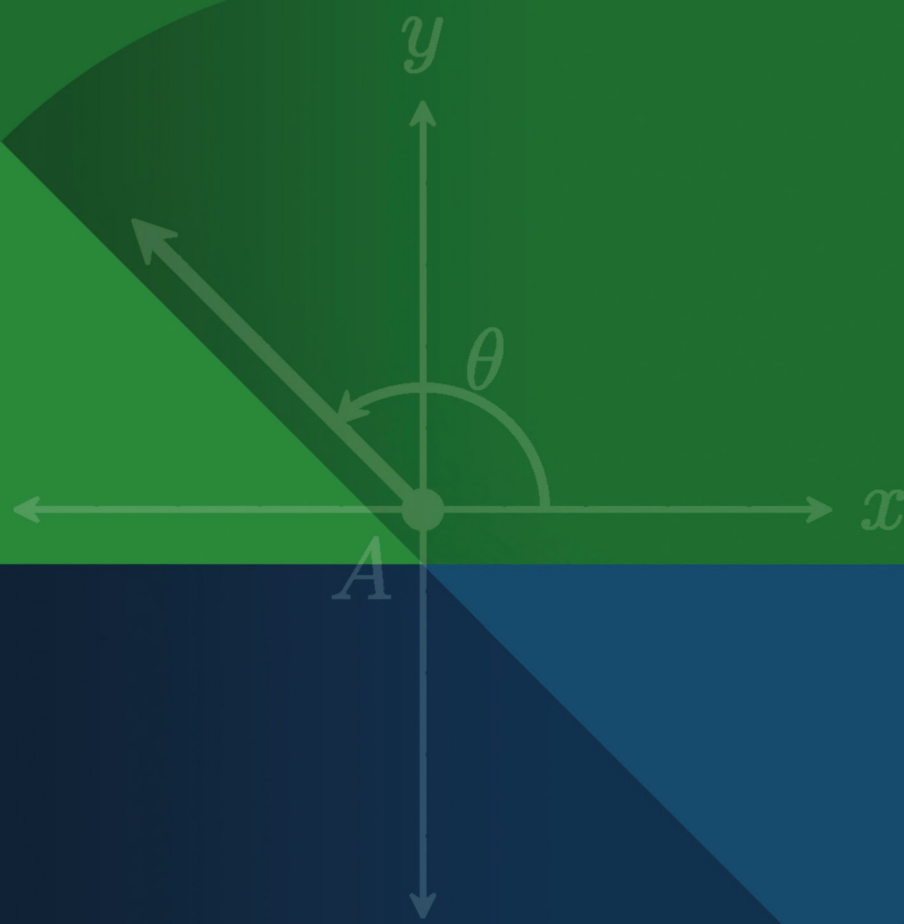
Yolanda Moreno Mendoza

Licenciada en Física y Matemáticas (Pontificia Universidad Javeriana), Especialista en Docencia de las Matemáticas (Pontificia Universidad Javeriana), Magister en Educación (Pontificia Universidad Javeriana). Docente de la Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova.

Ricardo González-Olaya

Ingeniero Civil (Universidad Militar Nueva Granada), Magister en Ingeniería Civil (Universidad Militar Nueva Granada). Coordinador del Área de Ínvestigación de la Facultad de Ingeniería Civil de la Escuela Militar de Cadetes General José María Córdova.

ESMIC
SELLO EDITORIAL



ESMIC
SELLO EDITORIAL

ISBN 978-628-95146-1-2
9 786289 514612